مراجعة ليلة الامتحان

لطلبة الثانوية

فى

الاستاتيكا

منتدى توجيه الرياضيات

أ/ عادل إدوار

① أكمل ما يأتى :

(١) زاوية الاحتكاك هى زاوية محصورة بين قوة رد الفعل العمودى ورد الفعل المحصل

(٢) لأى ثلاث متجهات $\overleftarrow{م}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{جـ}$ فى نفس المستوى يكون : $(\overleftarrow{م} \times \overleftarrow{ب}) \times (\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{جـ}) = \overleftarrow{صفر}$

(٣) إذا كانت لمجموعة من القوى المستوية المؤثرة على جسم متماسك فإن المجموع الجبرى

لعزوم القوى حول نقطة يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة

(٤) عندما يوضع قضيب داخل إناء كروى أملس فإنه يتزن عندما يمر خط عمل الوزن بمركز الكرة

(٥) إذا كان المتجهان $\overleftarrow{م} = ٢ \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب} = ٥ \overleftarrow{س} + ك \overleftarrow{ص}$ متوازيان فإن ك = . .

الحل $\overleftarrow{م} \times \overleftarrow{ب} = (٢ ، ١) \times (٥ ، ك) = ٠ \Longleftarrow ٢ \times ك - ٥ \times ١ = ٠ \therefore ك = \frac{٥}{٢}$

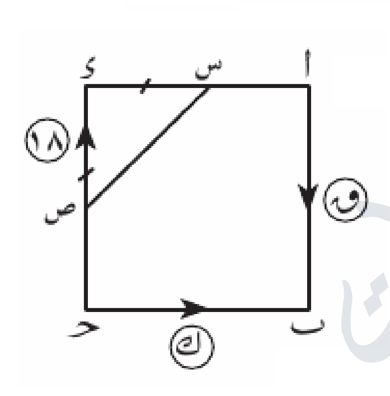
---

② المربع ا ب حـ ى طول ضلعه ١٠ سم والنقطتان س ، ص منتصفا $\overline{اى}$ ، $\overline{ىحـ}$ على الترتيب

. أثرت قوى مقاديرها ق ، ك ، ١٨ ث . جم فى $\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{حب}$ ، $\overleftarrow{حى}$ على الترتيب .

فإذا كان خط عمل محصلة هذه القوى هو $\overleftrightarrow{س ص}$ فأوجد قيمتى ق ، ك .

الحــل



$\because$ خط عمل المحصلة هو $\overleftrightarrow{س ص}$

$\therefore ج_{س} = - ق \times ٥ + ك \times ١٠ - ١٨ \times ٥ =$ صفر

$\therefore ٢ ك - ق = ١٨$ .... (١)

$ج_{ص} = - ق \times ١٠ + ك \times ٥ = ٠$

$\therefore ك = ٢ ق$ .... (٢)

من (١) ، (٢) $\therefore ق = ٦$ ث . جم ، ك = ١٢ ث . جم

---

③ إذا أثرت القوتان $\overleftarrow{ق_{١}} = ٩ \overleftarrow{س} - ٣ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}} = - ٦ \overleftarrow{س} + ٢ \overleftarrow{ص}$ فى النقطتين (٠ ، ٦)

، (٠ ، ٨) على الترتيب . أوجد نقطة تقاطع خط عمل محصلة القوتين مع محور الصادات .

الحــل

$\overleftarrow{ع} = \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} = ٣\, \overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص}$

∵ ميل $\overleftarrow{ق_1} = -\frac{١}{٣}$ ، ميل $\overleftarrow{ق_2} = -\frac{١}{٣}$ ∴ $\overleftarrow{ق_1} // \overleftarrow{ق_2}$

بفرض أن : خط عمل المحصلة يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ل)

∴ مجموع عزوم القوى حول و = عــزم المحصلــة حول و

∴ (٠ ، ٦) × (٩ ، -٣) + (٠ ، ٨) × (-٦ ، ٢) = (٠ ، ل) × (٣ ، -١)

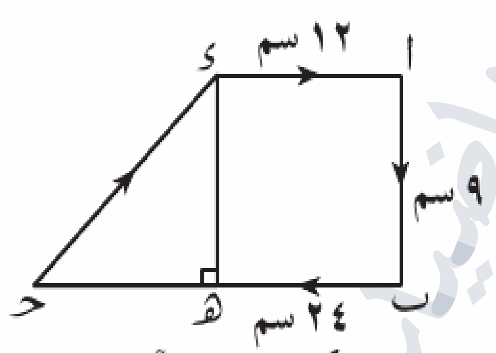
∴ $-٥٤\, \overleftarrow{ع} + ٤٨\, \overleftarrow{ع} = -٣\, ل\, \overleftarrow{ع}$ $-٦ = -٣\, ل$ ∴ ل = ٢

∴ نقطة التقاطع هي (٠ ، ٢)

---

④ ا ب حـ ء شبــــه منحرف فيــــه : $\overline{اء} // \overline{بحـ}$ ، ق (∠ ب) = ٩٠° ، ا ب = ٩ سم ، ب حـ = ٢ اء = ٢٤ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٣ ق ، ٨ ق ، ٥ ق ، ٤ ق نيوتن في أضلاع الشكل بحيث تمثله تمثيلاً تامًا $\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{بحـ}$ ، $\overleftarrow{حـء}$ ، $\overleftarrow{ءا}$ على الترتيب . فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٦٤٨ نيوتن . سم في الاتجاه ا ب حـ ء فأوجد قيمة ق .

الحــل



∵ Δ ء هـ حـ قائم الزاوية في هـ

∴ $(ءحـ)^2 = (ءهـ)^2 + (هـحـ)^2$

∴ $(ءحـ)^2 = ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥$

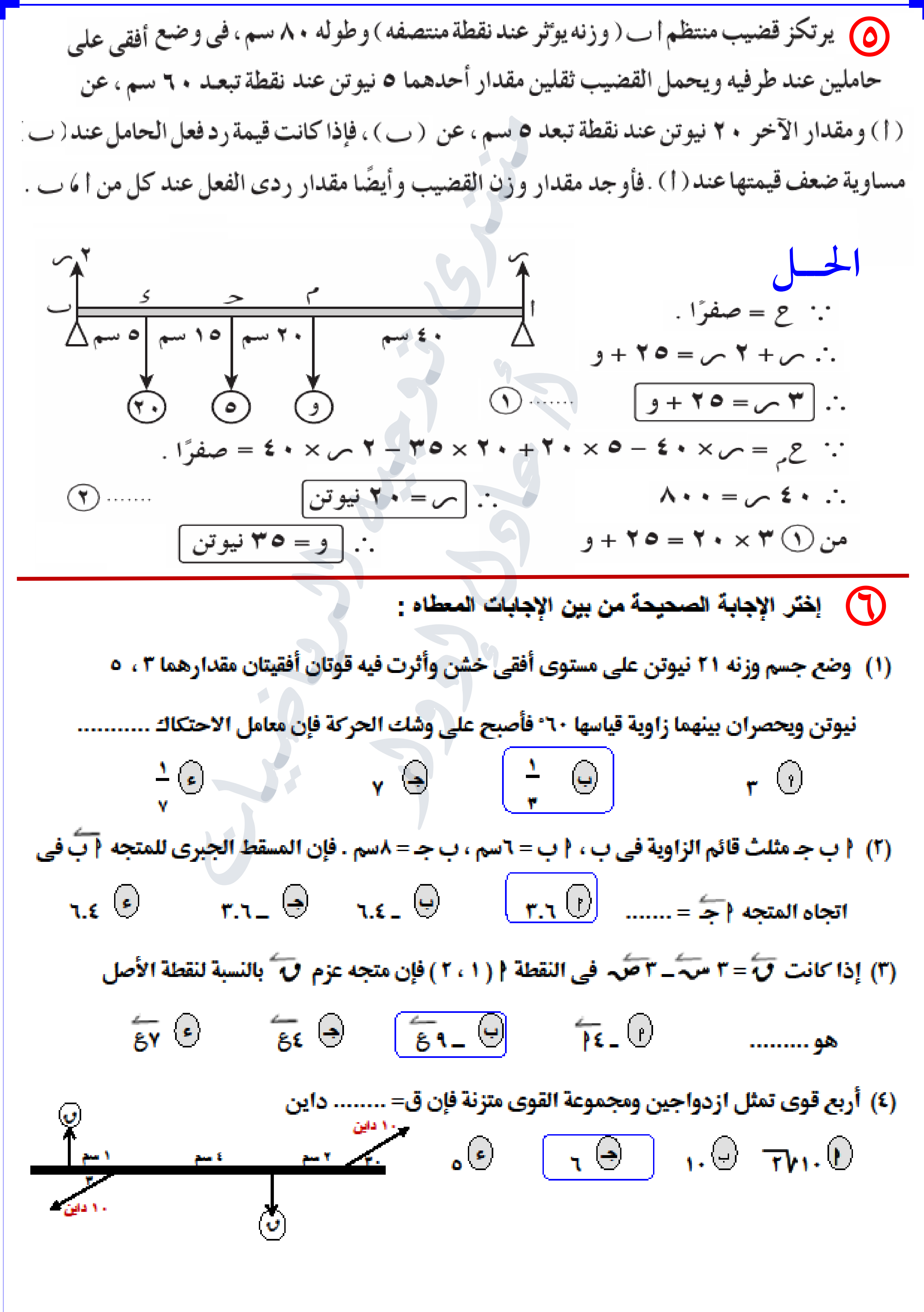
∴ ء حـ = ١٥ سم .

∵ القوى مأخوذة في ترتيب دوري واحد والمجموعة تكافئ ازدواجًا .

∴ القوى تتناسب مع أضلاع الشكل . أي : $\frac{٣ق}{٩} = \frac{٨ق}{٢٤} = \frac{٥ق}{١٥} = \frac{٤ق}{١٢} = \frac{١}{٣}$

∵ معيار عزم الازدواج حول حـ = ٦٤٨ نيوتن . سم .

∴ ٣ ق × ٢٤ + ٤ ق × ٩ = ٦٤٨   ∴ ق = $\frac{٦٤٨}{١٠٨}$ = ٦ نيوتن .



⑤ يرتكز قضيب منتظم ا ب (وزنه يؤثر عند نقطة منتصفه) وطوله ٨٠ سم ، في وضع أفقي على حاملين عند طرفيه ويحمل القضيب ثقلين مقدار أحدهما ٥ نيوتن عند نقطة تبعد ٦٠ سم ، عن (ا) ومقدار الآخر ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ٥ سم ، عن (ب) ، فإذا كانت قيمة رد فعل الحامل عند (ب) مساوية ضعف قيمتها عند (ا) . فأوجد مقدار وزن القضيب وأيضًا مقدار ردى الفعل عند كل من ا ، ب .

الحل

∵ ح = صفرًا .

∴ ر + ٢ ر = ٢٥ + و

∴ ٣ ر = ٢٥ + و ...... (١)

∵ $ح_م$ = ر × ٤٠ − ٥ × ٢٠ + ٢٠ × ٣٥ − ٢ ر × ٤٠ = صفرًا .

∴ ٤٠ ر = ٨٠٠ ∴ ر = ٢٠ نيوتن ...... (٢)

من (١) ٣ × ٢٠ = ٢٥ + و ∴ و = ٣٥ نيوتن

---

⑥ إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

(١) وضع جسم وزنه ٢١ نيوتن على مستوى أفقي خشن وأثرت فيه قوتان أفقيتان مقدارهما ٣ ، ٥ نيوتن ويحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فأصبح على وشك الحركة فإن معامل الاحتكاك ....

(أ) ٣ (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) ٧ (ء) $\frac{1}{7}$

(٢) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم . فإن المسقط الجبرى للمتجه $\overleftarrow{أ ب}$ في اتجاه المتجه $\overleftarrow{أ جـ}$ = ...

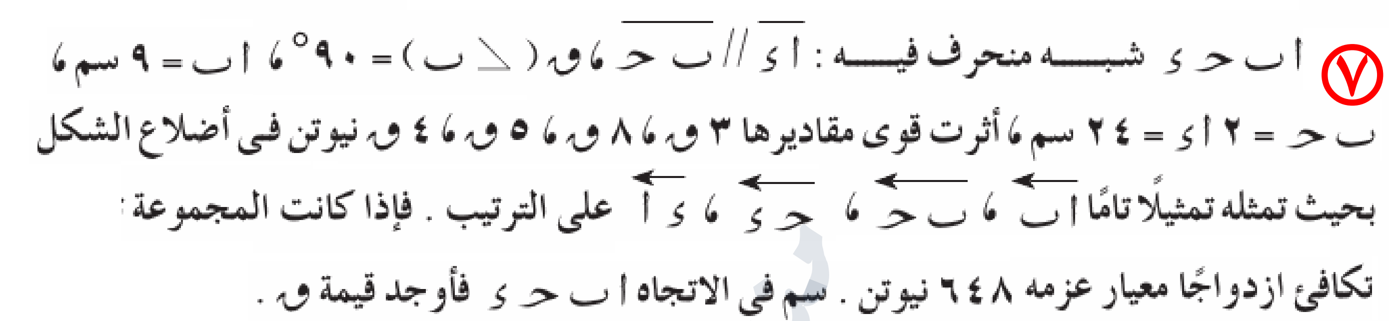
(أ) ٣.٦ (ب) −٦.٤ (جـ) −٣.٦ (ء) ٦.٤

(٣) إذا كانت $\overleftarrow{ق}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ص}$ في النقطة أ (١ ، ٢) فإن متجه عزم $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة الأصل هو ....

(أ) −٤ $\overleftarrow{ع}$ (ب) −٩ $\overleftarrow{ع}$ (جـ) ٤ $\overleftarrow{ع}$ (ء) ٧ $\overleftarrow{ع}$

(٤) أربع قوى تمثل ازدواجين ومجموعة القوى متزنة فإن ق= .... داين

(أ) ١٠ $\sqrt{2}$ (ب) ١٠ (جـ) ٦ (ء) ٥


⑦ ا ب حـ ء شبه منحرف فيه : اء // ب حـ ، ق (∠ ب) = ٩٠° ، اب = ٩ سم ، ب حـ = ٢ اء = ٢٤ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٣ ق ، ٨ ق ، ٥ ق ، ٤ ق نيوتن في أضلاع الشكل بحيث تمثله تمثيلاً تامًا اب ، ب حـ ، حـ ء ، ء ا على الترتيب . فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٦٤٨ نيوتن . سم في الاتجاه ا ب حـ ء فأوجد قيمة ق .

الحـــل

∵ △ ء هـ حـ قائم الزاوية في هـ

∴ $(ء حـ)^2 = (ء هـ)^2 + (هـ حـ)^2$

∴ $(ء حـ)^2 = ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥$

∴ ء حـ = ١٥ سم .

∵ القوى مأخوذة في ترتيب دوري واحد والمجموعة تكافئ ازدواجًا .

∴ القوى تتناسب مع أضلاع الشكل . أي : $\frac{٣ ق}{٩} = \frac{٨ ق}{٢٤} = \frac{٥ ق}{١٥} = \frac{٤ ق}{١٢} = \frac{١}{٣}$

∵ معيار عزم الازدواج حول حـ = ٦٤٨ نيوتن . سم .

∴ ٣ ق × ٢٤ + ٤ ق × ٩ = ٦٤٨

∴ ق = $\frac{٦٤٨}{١٠٨}$ = ٦ نيوتن .

---

⑧ تؤثر القوتان ق١ = س + ٢ ص ، ق٢ = م س − ٤ ص عند النقطتين ا = (١ ، ٥) ، ب = (٣ ، ٠) على الترتيب ، عين قيمة الثابت م بحيث ينعدم مجموع عزمي هاتين القوتين بالنسبة لنقطة الأصل .

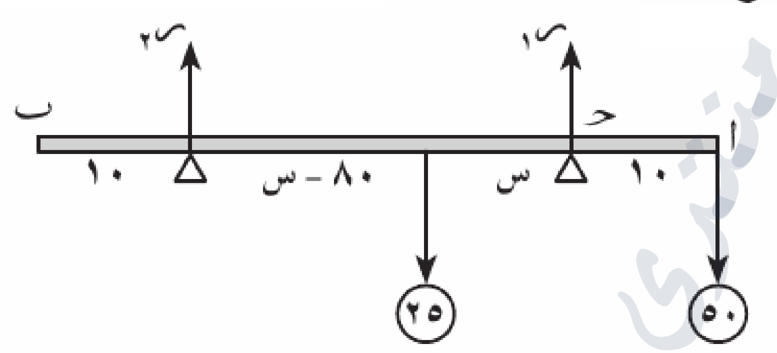
الحـــل

∵ $\overleftarrow{ج_و} = \overleftarrow{و ا} \times \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{و ب} \times \overleftarrow{ق_2}$

∴ (١ ، ٥) × (٢ ، ١) + (٣ ، ٠) × (م ، −٤) = $\overleftarrow{٠}$

∴ ١٠ − ١ − ٣ م = ٠ ∴ م = ٣

٩) قضيب غير منتظم $\overline{\text{ا ب}}$ طوله (متر واحد) ووزنه ٢٥ ث . كجم . يرتكز في وضع أفقي على حاملين عند حـ ، ء حيث ا حـ = ب ء = ١٠ سم فإذا علق من الطرف ا ثقل مقداره ٥٠ ث . كجم أصبح القضيب على وشك الدوران حول حـ فعين نقطة تأثير وزن القضيب ثم أوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من الطرف ب دون أن يختل التوازن مع بقاء الثقل المعلق عند ا .



الحل: ∵ ج$_{\text{حـ}}$ = صفر

∴ ٢٥ × س − ٥٠ × ١٠ = ٠

∴ س = ٢٠ سم .

∴ نقطة تأثير الوزن تبعد ٣٠ سم عن ا

∵ ج$_{\text{ء}}$ = صفر

∴ − ٥٠ × ٩٠ − ٢٥ × ٦٠ + و × ١٠ = ٠

∴ و = ٦٠٠ ث . كجم .

---

١٠) وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أفقي خشن قياس زاوية الإحتكاك بين الجسم والمستوى (ل) شد الجسم بقوة تصنع مع الأفقي زاوية قياسها (٢ ل) جعلت الجسم على وشك الحركة . أثبت أن مقدار هذه القوة يساوي و ظا ل

الحل

معادلتا الإتزان هما   ق جتا ٢ل = $\frac{\text{ر جا ل}}{\text{جتا ل}}$ .... (١)

ر + ق جا ٢ل = و .... (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ر = $\frac{\text{ق جتا ٢ل جتا ل}}{\text{جا ل}}$

∴ $\frac{\text{ق جتا ٢ل جتا ل}}{\text{جا ل}}$ + ق جا ٢ل = و

∴ ق جتا ٢ل جتا ل + ق جا ٢ل جا ل = ق(جتا ٢ل جتا ل + جا ٢ل جا ل) = و جا ل

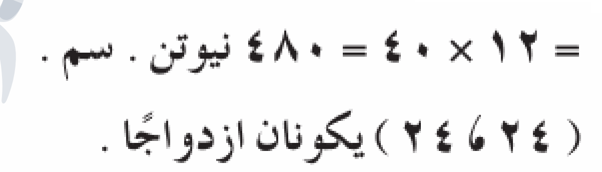
∴ ق جتا (٢ل − ل) = و جا ل   ∴ ق جتا ل = و جا ل

∴ ق = $\frac{\text{و جا ل}}{\text{جتا ل}}$ = و ظا ل

(١١) ا ب حـ ء مستطيل فيه ا ب = ٣٠ سم ، ب حـ = ٤٠ سم ، أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ٢٤ ، ١٢ ، ٢٤ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{ب ا}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء ا}}$ على الترتيب ، أثبت أن : هذه القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد مقدار كل من القوتين اللتين تؤثران فى ا ، حـ وتوازيان $\overline{\text{ب ء}}$ وتجعلان المجموعة متزنة .

الحــل

(١٢ ، ١٢) يكونان ازدواجًا عزمه .



= ١٢ × ٤٠ = ٤٨٠ نيوتن . سم .

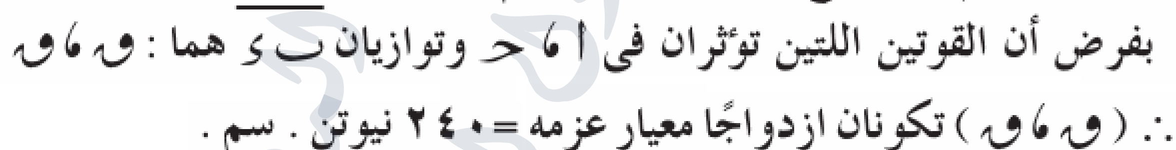
(٢٤ ، ٢٤) يكونان ازدواجًا .

عزمه = − ٢٤ × ٣٠ = − ٧٢٠ نيوتن . سم .

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا عزمه

= ٤٨٠ − ٧٢٠ = − ٢٤٠ نيوتن . سم .

∴ معيار عزم الازدواج = ٢٤٠ نيوتن . سم .



بفرض أن القوتين اللتين تؤثران فى ا ، حـ وتوازيان $\overline{\text{ب ء}}$ هما : ق ، ق

∴ (ق ، ق) تكونان ازدواجًا معيار عزمه = ٢٤٠ نيوتن . سم .

∴ ق × ا س = ٢٤٠ ∵ ا س = ٢ ا هـ = $\frac{\text{٢ × ا ب × ا ء}}{\text{ب ء}}$

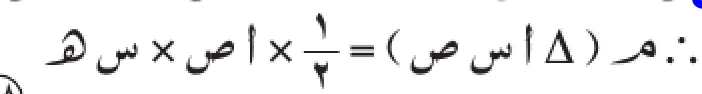
∴ ا س = $\frac{\text{٢ × ٣٠ × ٤٠}}{\text{٥٠}}$ = ٤٨ سم .

∵ المجموعة متزنة . ∴ ق × ا س − ٢٤٠ = ٠

∴ ق × ٤٨ = ٢٤٠ ∴ ق = ٥ نيوتن .

(١٢) المستطيل ا ب حـ ء فيه ا ب = ١٠ سم ، ب حـ = ١٢ سم نصف $\overline{\text{ا ب}}$ فى س ، $\overline{\text{حـ ء}}$ فى ص . أثرت قوى مقاديرها ١٨ ، ٢٠ ، ١٨ ، ٢٠ ، ٢٦ ، ٢٦ ث . جم فى $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ا ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ا ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ على التريب . أثبت أن هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه .

الحـــل في المستطيل ا س ص ى ، ∵ $\overline{\text{س هـ}} \perp \overline{\text{ا ص}}$


∴ م (Δ ا س ص) = $\frac{1}{2}$ × ا ص × س هـ

∴ م (Δ ا س ص) = $\frac{1}{2}$ × ا س × س ص

∴ ا ص × س هـ = ا س × س ص

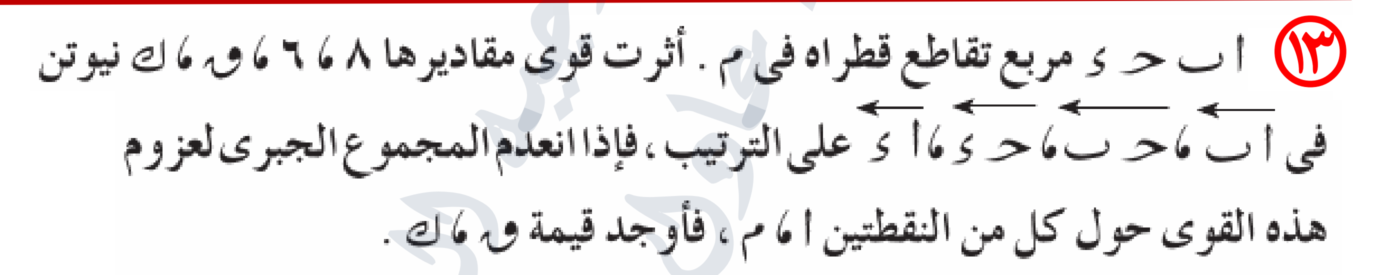
∴ ١٣ × س هـ = ٥ × ١٢ ∴ س هـ = $\frac{٦٠}{١٣}$ سم .

(١٨ ، ١٨) يكونان ازدواجًا عزمه = − ١٨ × ١٢ = − ٢١٦ ث . جم . سم .

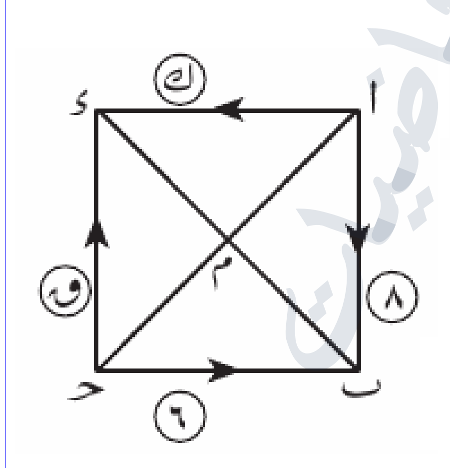
(٢٠ ، ٢٠) يكونان ازدواجًا عزمه = ٢٠ × ١٠ = ٢٠٠ ث . جم . سم .

(٢٦ ، ٢٦) يكونان ازدواجًا عزمه = $\frac{٢٦ \times ٦٠}{١٣}$ = ١٢٠ ث . جم . سم .

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا عزمه = ١٠٤ ث . جم . سم .


(١٣) ا ب حـ ى مربع تقاطع قطراه في م . أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ٦ ، ق ، ك نيوتن في $\overrightarrow{\text{ا ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ى}}$ ، $\overrightarrow{\text{ا ى}}$ على الترتيب ، فإذا انعدم المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول كل من النقطتين ا ، م ، فأوجد قيمة ق ، ك .

الحـــل ∵ $ج_ا$ = صفرًا .



∴ ٦ × ل − ق × ل = ٠ ∴ **ق = ٦ نيوتن**

(حيث ل طول ضلع المربع)

∵ $ج_م$ = صفرًا .

∴ (− ٨ + ٦ − ق + ك) × $\frac{ل}{٢}$ = صفرًا .

∴ **ك = ٨ نيوتن**

(١٤) تؤثر عند النقطة أ (٣ ، ٢) القوة $\overleftarrow{ق_١}$ = $\overleftarrow{س}$ + ٨ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ل $\overleftarrow{س}$ + ٥ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ = $\overleftarrow{س}$ − $\overleftarrow{ص}$ فإذا كان مجموع عزوم هذه القوى حول النقطة ب (− ١ ، ١) هو ٢٦ $\overleftarrow{ع}$ فعين كلًا من : الثابت ل وطول العمود الساقط من النقطة ب على خط المحصلة .

الحل

∵ $\overleftarrow{ب أ}$ = $\overleftarrow{أ}$ − $\overleftarrow{ب}$ = (٣ ، ٢) ∴ $\overleftarrow{ح}$ = (٢ + ل) $\overleftarrow{س}$ + ١٢ $\overleftarrow{ص}$

∴ $\overleftarrow{جـ_ب}$ = $\overleftarrow{ب أ}$ × $\overleftarrow{ح}$ ∴ ٢٦ $\overleftarrow{ع}$ = (٣ ، ٢) × (٢ + ل ، ١٢)

∴ ٢٦ $\overleftarrow{ع}$ = (٣٦ − ٤ − ٢ ل) $\overleftarrow{ع}$

∴ ٢ ل = ٣٢ − ٢٦ ∴ **ل = ٣** ∴ $\overleftarrow{ح}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ + ١٢ $\overleftarrow{ص}$

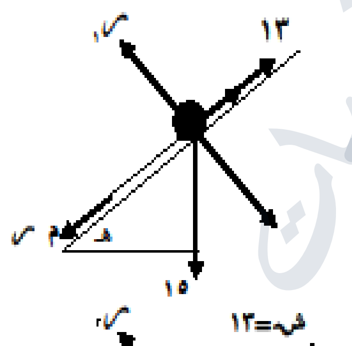
طول العمود المرسوم من ب على خط عمل $\overleftarrow{ح}$

= $\frac{\| \overleftarrow{جـ_ب} \|}{\| \overleftarrow{ح} \|}$ = $\frac{٢٦}{١٣}$ = ٢ وحدة طول .

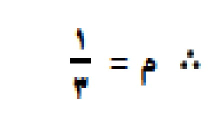
---

(١٥) وضع جسم وزنه ١٥ نيوتن على مستو مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية جيبها $\frac{٣}{٥}$ شد الجسم بقوة لأعلى المستوى وموازية لخط أكبر ميل فجعلت الجسم على وشك الحركة لأعل المستوى فإذا كان مقدار هذة القمة يساوى ١٣ نيوتن فأوجد معامل الإحتكاك بين الجسم والمستوى

الحل



بالتحليل فى إتجاهى المستوى والعمودى عليه نحصل على معادلتا الإتزان



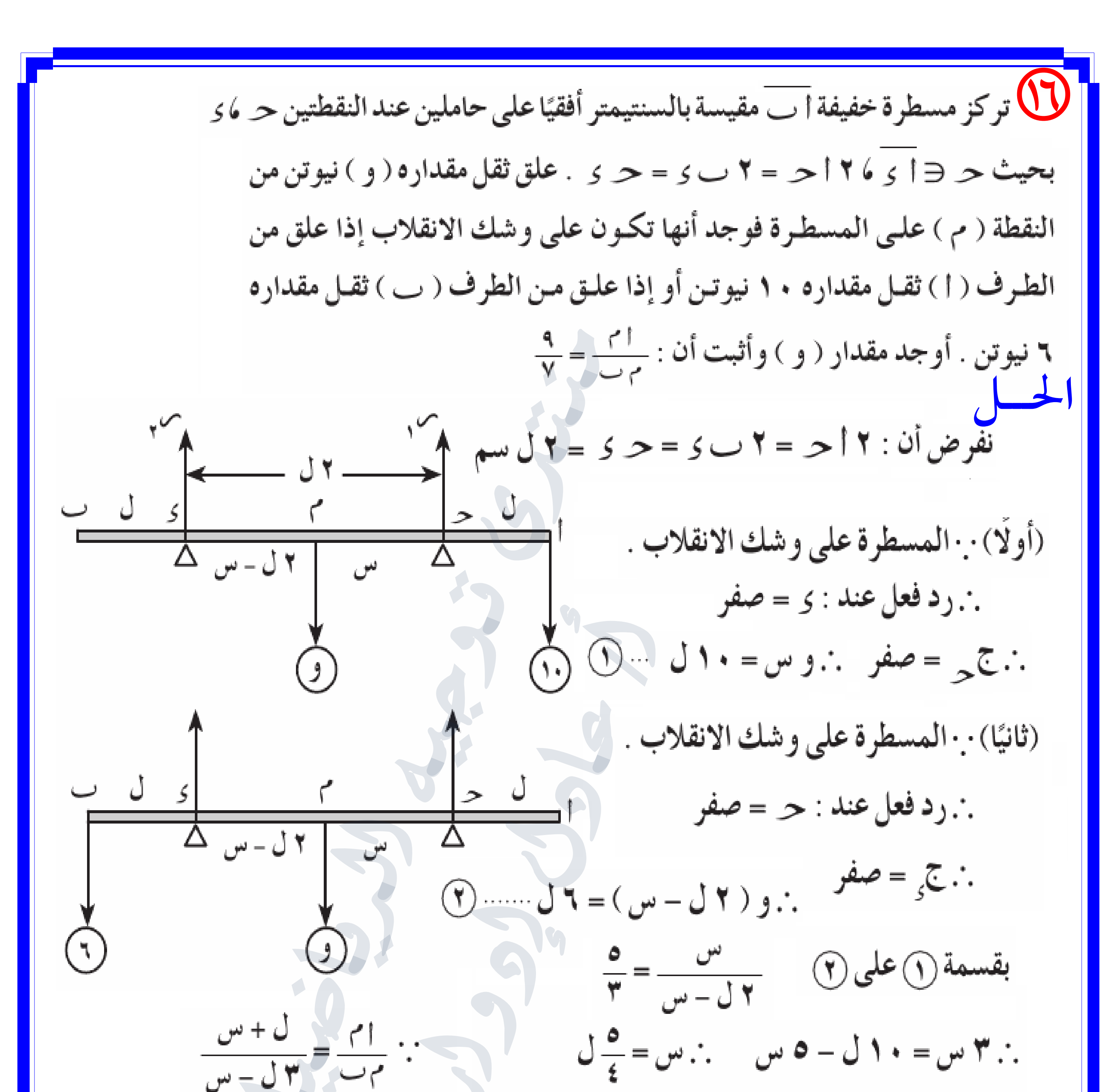
١٣ = ١٥ × $\frac{٣}{٥}$ + م ر ∴ ١٣ = ٩ + م ر (١)

، ر = ١٥ × $\frac{٤}{٥}$ ∴ ر = ١٢ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ١٣ = ٩ + ١٢ م ∴ ١٢ م = ٤ ∴ م = $\frac{١}{٣}$

⑯ تركز مسطرة خفيفة $\overline{أب}$ مقيسة بالسنتيمتر أفقيًا على حاملين عند النقطتين حـ ، ى بحيث حـ ∈ $\overline{أى}$ ، ٢ أحـ = ٢ ب ى = حـ ى . علق ثقل مقداره (و) نيوتن من النقطة (م) على المسطرة فوجد أنها تكون على وشك الانقلاب إذا علق من الطرف (أ) ثقل مقداره ١٠ نيوتن أو إذا علق من الطرف (ب) ثقل مقداره ٦ نيوتن . أوجد مقدار (و) وأثبت أن : $\frac{أم}{م ب} = \frac{٩}{٧}$

الحـــل



نفرض أن : ٢ أحـ = ٢ ب ى = حـ ى = ٢ ل سم

(أولًا) ∵ المسطرة على وشك الانقلاب .

∴ رد فعل عند : ى = صفر

∴ $ج_{حـ}$ = صفر ∴ و س = ١٠ ل ...... ①

(ثانيًا) ∵ المسطرة على وشك الانقلاب .

∴ رد فعل عند : حـ = صفر

∴ $ج_{ى}$ = صفر

∴ و (٢ ل − س) = ٦ ل .... ②

بقسمة ① على ② $\frac{س}{٢ ل - س} = \frac{٥}{٣}$

∴ ٣ س = ١٠ ل − ٥ س ∴ س = $\frac{٥}{٤}$ ل

∵ $\frac{أم}{م ب} = \frac{ل + س}{٣ ل - س}$

∴ $\frac{أم}{م ب} = \frac{٩}{٤} ل \times \frac{٤}{٧ ل} = \frac{٩}{٧}$

---

⑰ تـؤثر القوتـان $\overrightarrow{ق_١}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = $\overrightarrow{س}$ + ٩ $\overrightarrow{ص}$ عنـد النقطـة أ = (١ ، ٣) أوجد متجه عزم محصلة هاتين القوتين بالنسبة للنقطة ب = (٥ ، ٠) ، ثم أوجد طول العمود المرسوم من النقطة ب على خط عمل المحصلة .

الحـــل

$\because \overleftarrow{ع} = \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} = ٦ \overleftarrow{س} + ٨ \overleftarrow{ص}$

$\because \overleftarrow{ب أ} = \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = (-٤ ، ٣)$

$\therefore \overleftarrow{ج_ب} = \overleftarrow{ب أ} \times \overleftarrow{ع} = (-٤ ، ٣) \times (٦ ، ٨)$

$= (-٣٢ - ١٨) \overleftarrow{ع} = -٥٠ \overleftarrow{ع}$

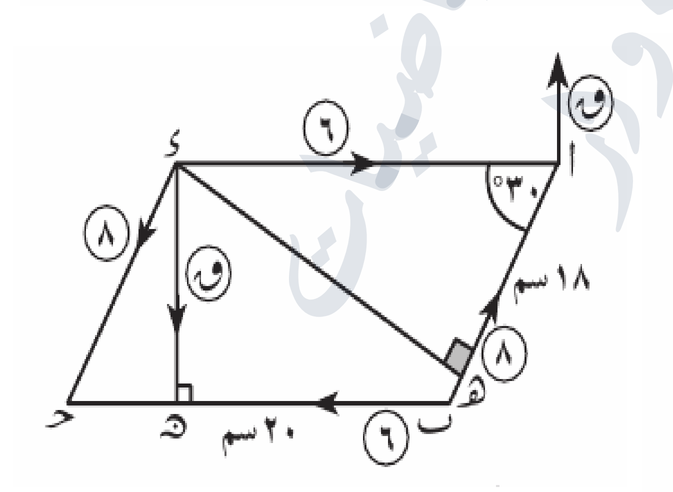
$\| \overleftarrow{ع} \| = \sqrt{٣٦ + ٦٤} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$

$\therefore$ طول العمود $= \frac{\| \overleftarrow{ج_ب} \|}{\| \overleftarrow{ع} \|} = ٥$ وحدات طول .

---

(١٨) ا ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : ا ب = ١٨ سم ، ب حـ = ٢٠ سم ، ق($\angle$ ا) = ٣٠° أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ٦ ، ٨ ، ٦ نيوتن في $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{ء حـ}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ على الترتيب . أثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد مقدار قوتين تؤثران في ا ، ء وعموديتين على $\overline{اء}$ وتكافئان المجموعة السابقة .

الحـــل



(٨ ، ٨) تكونان ازدواجًا عزمه .

= ٨ × ٢٠ حا ٣٠° = ٨٠ نيوتن . سم .

(٦ ، ٦) تكونان ازدواجًا عزمه .

= − ٦ × ١٨ حا ٣٠° = − ٥٤ نيوتن . سم

$\therefore$ المجموعة تكافئ ازدواجًا عزمه

= ٨٠ − ٥٤ = ٢٦ نيوتن . سم .

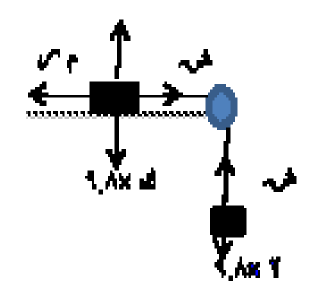
القوتان المؤثرتان في ا ، ء تكونان ازدواجًا عزمه = ق × ٢٠ نيوتن . سم .

$\therefore$ ٢٠ ق = ٢٦ $\qquad \therefore$ ق = ١,٣ نيوتن .



أكمل ما يأتى :

(١) فى الشكل المقابل : إذا كانت المجموعة على وشك الحركة فإن معامل الاحتكاك هو ....



الحل ∵ الجسم على وشك الحركة

∴ معادلة الأتزان هى : ش = ٢ × ٩.٨ ، ر = ك × ٩.٨ ، ش = م ر

∴ ٢ × ٩.٨ = م × ك × ٩.٨ ∴ ٢ = ٥ م ∴ م = $\frac{٢}{٥}$

(٢) إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب}$ = ١٢ $\overleftarrow{س}$ + ٥ $\overleftarrow{ص}$ ، هـ قياس الزاوية بين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$

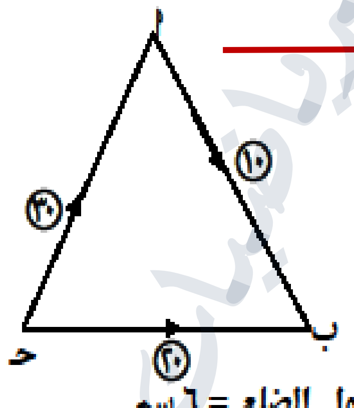
فإن جتا هـ = ...

الحل ∵ $\overleftarrow{أ}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ∴ ‖ $\overleftarrow{أ}$ ‖ = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = ٥ وحدة طول

، $\overleftarrow{ب}$ = ١٢ $\overleftarrow{س}$ + ٥ $\overleftarrow{ص}$ ∴ ‖ $\overleftarrow{ب}$ ‖ = $\sqrt{١٤٤ + ٢٥}$ = ١٣ وحدة طول

∵ $\overleftarrow{أ}$ ⊙ $\overleftarrow{ب}$ = أ ب جتا هـ ← (٤ ، ٣) ⊙ (١٢ ، ٥) = ٥ × ١٣ × جتا هـ

٤٨ + ١٥ = ٦٥ جتا هـ ∴ جتا هـ = $\frac{٦٣}{٦٥}$



(٣) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٦ سم تؤثر القوى فى

الاتجاهات المبينة بالشكل فإن المجموع الجبرى لعزوم القوى

بالنسبة لنقطة تلاقى متوسطاته يساوى .... نيوتن.سم

الحل المثلث متساوى الأضلاع متوسط المثلث هو ارتفاع المثلث طول الضلع = ٦ سم

∴ طول المتوسط (الارتفاع) = ٣ $\sqrt{٣}$

∴ م نقطة تلاقى المتوسطات تبعد عن خط عمل كل قوة هو ١ $\sqrt{٣}$

$ح_م$ = (ـ ٢٤ ـ ٣٦ + ١٨) × $\sqrt{٣}$ = ٤٢ $\sqrt{٣}$

٢٠ ا ب لوح منتظم من الخشب (وزنه يؤثر في منتصفه) طوله ١٦ مترًا ومقدار وزنه ٤٠ ث . كجم موضوع أفقيًا على قائمين يبعد أحدهما ٢ متر عن ا ويبعد الآخر ٤ أمتار عن ب ، فإذا صعد رجل مقدار وزنه ٨٠ ث . كجم على اللوح فأوجد مقدار رد فعل كل من القائمين على اللوح عندما يكون الرجل عند ا ، وإذا تحرك الرجل على اللوح مبتدئًا من ا متجهًا نحو ب فأوجد أقصى مسافة يمكن أن يتحركها الرجل على اللوح دون أن ينقلب اللوح .

الحل

عندما يكون الرجل عند ا ∵ ع = ٠

∴ $ر_{1}$ + $ر_{2}$ = ١٢٠ .... (١)

∵ $ج_{ى}$ = − ٨٠ × ١٢ + $ر_{1}$ × ١٠ − ٤٠ × ٤ = ٠

∴ $ر_{1}$ = ١١٢ ث . كجم

من (١) $ر_{2}$ = ٨ ث كجم .

عندما يتحرك الرجل . نفرض أن أقصى مسافة يتحركها الرجل ابتداء من ا هي س متر فيكون القضيب على وشك الدوران حول ى

∴ رد الفعل عند حـ = صفرًا .

$ج_{ى}$ = − ٨٠ × (١٢ − س) − ٤٠ × ٤ = صفرًا .

(بالقسمة على − ٨٠) ١٢ − س + ٢ = ٠

∴ س = ١٤ مترًا .

أقصى مسافة يتحركها دون أن ينقلب اللوح ١٤ مترًا .

(٢١) أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم تؤثر القوى ٢ ، ٥ ، ١ ، ٦ ، $7\sqrt{2}$ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ء أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ على الترتيب عين قوتين متوازيتين تعملان عند أ ، حـ وتكافئان المجموعة

الحـــل ∵ $س_1 = س_2$

∴ $-6 + 5 + 7\sqrt{2}$ حتا ٤٥° = ق$_1$ حتا هـ + ق$_2$ حتا هـ

∴ ٦ = (ق$_1$ + ق$_2$) حتا هـ .... (١) ، $ص_1 = ص_2$

∴ $2 + 7\sqrt{2}$ حا ٤٥° − ١ = ق$_1$ حا هـ + ق$_2$ حا هـ

∴ ٨ = (ق$_1$ + ق$_2$) حا هـ (٢)

بقسمة (٢) على (١) ينتج : طا هـ = $\frac{٤}{٣}$ ∴ حتا هـ = $\frac{٣}{٥}$

بالتعويض (١) ينتج : ٦ = (ق$_1$ + ق$_2$) × $\frac{٣}{٥}$ ∴ ق$_1$ + ق$_2$ = ١٠ ... (٣)

، ∵ جـ$_ب$ للمجموعة الأولى = جـ$_ب$′ للمجموعة الثانية

∴ ق$_1$ حتا هـ × ١٠ − ق$_2$ حا هـ × ١٠ = − ٦ × ١٠ + ١ × ١٠

∴ ٣ ق$_1$ − ٤ ق$_2$ = − ٢٥ ..... (٤)

بحل المعادلتين (٣) ، (٤) ينتج : ق$_1$ = $\frac{٥}{١٧}$ نيوتن ، ق$_2$ = $\frac{٥}{١٧}$ نيوتن ، طا هـ = $\frac{٤}{٣}$

---

(٢٢) س ص ع ل شبه منحرف قائم الزاوية في س ، $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ بحيث س ص = س ل = ١٠ سم ، ص ع = ٢٠ سم . أثرت قوى مقاديرها ٢٠ ، و$_1$ ، ١٥ ، $2\sqrt{}$ ٥ ، و$_2$ نيوتن في $\overleftarrow{\text{ص س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ل ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ل س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص ل}}$ على الترتيب . فإذا كان خط عمل محصلة هذه القوى يمر بالنقطة س ويوازي $\overleftrightarrow{\text{ص ل}}$ فأوجد قيمتي و$_1$ ، و$_2$.

الحل

∵ س ص م ل مربع ، س ص = ١٠ سم .

∴ ص ل = ١٠ $\sqrt{2}$ سم ، س ن = ٥ $\sqrt{2}$ سم .

∵ خط عمل المحصلة // $\overleftrightarrow{\text{ص ل}}$

∴ $ج_{ص} = ج_{ل}$

∴ $-5 \times 10 + 15\sqrt{2} \times 10\sqrt{2} = ق_1 \times 10 + 20 \times 10$

$250 = 10\, ق_1 + 200$ ∴ $ق_1$ = ٥ نيوتن .

∵ خط عمل المحصلة يمر بالنقطة س ∴ $ج_{س}$ = صفر

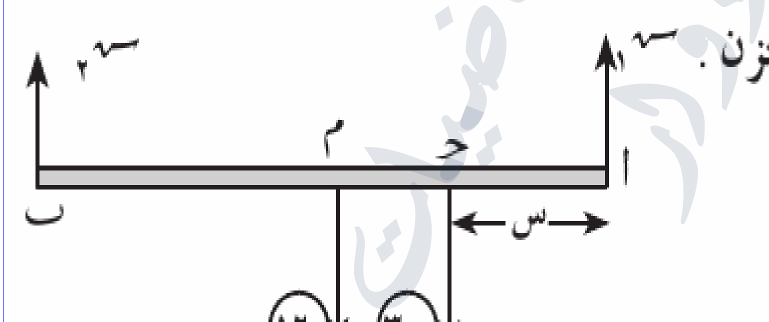
∴ $-ق_2 \times 5\sqrt{2} + 5 \times 10 + 15\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 0$

$\sqrt{2}\, ق_2 = 40$ ∴ $ق_2 = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$ نيوتن .

---

(٢٣) ا ب قضيب منتظم طوله ١٨٠ سم ، ومقدار وزنه ١٢٠ نيوتن (يؤثر في منتصفه) معلق في وضع أفقي من طرفيه بواسطة خيطين خفيفين رأسيين ، عند أي موضع من القضيب يجب تعليق ثقل مقداره ٣٠٠ نيوتن حتى يصبح مقدار الشد عند الطرف ا مساويًا لضعف قيمته عند الطرف ب

الحل



∵ $ش_1 = 2\, ش_2$ ، القضيب متزن .

∴ $ش_1 + ش_2 = 300 + 120$

= ٤٢٠ نيوتن .

∴ $3\, ش_2 = 420$ ∴ $ش_2$ = ١٤٠ نيوتن .

∴ $ش_1$ = ٢٨٠ نيوتن .

∵ $ج_{ا} = 300 \times س + 120 \times 90 - ش_2 \times 180$ = صفرًا

∴ $30\,(10\, س + 360 - 140 \times 6) = 0$

∴ س = ٨٤ − ٣٦ = ٤٨ سم . يعلق الثقل على بعد ٤٨ سم من ا

(٢٤) قضيب منتظم يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى معامل الإحتكاك بينه و بين القضيب يساوى ٣/٤ و بطرفه السفلى على مستوى أفقى معامل الإحتكاك بينه و بين القضيب يساوى ١/٢ أوجد زاوية ميل القضيب على الأفقى عندما يكون على وشك الإنزلاق

الحـــل

بتحليل القوى فى الشكل المقابل و نفرض أن طول السلم = ٢ ل :

ر٢ − ٣/٤ ر١ = ٠ ∴ ر٢ = ٣/٤ ر١

، ر١ + ١/٢ ر٢ − و = ٠ ∴ ر١ + ١/٢ ر٢ = و

بالتعويض : و = ر١ + ١/٢ × ٣/٤ ر١ = ١١/٨ ر١

∴ و = ١١/٦ ر٢

∴ ج‍ب = و × ل حتا هـ − ر٢ × ٢ ل حا هـ − ١/٢ ر٢ × ٢ ل حتا هـ = ٠

بالتعويض ينتج : ١١/٦ ر٢ حتا هـ − ٢ ر٢ حا هـ − ر٢ حتا هـ = ٠

∴ ٥/٦ حتا هـ = ٢ حا هـ ∴ طا هـ = ٥/١٢ ∴ السلم يميل على الأفقى بزاوية ظلها ٥/١٢

---

(٢٥) ا ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب ، وفيه ا ب = ٣ سم ، ب ح = ٤ سم ، أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ١٦ ، ٢٠ نيوتن فى ا ب ، ب ح ، ح ا على الترتيب ، أثبت أن هذه المجموعة من القوى تكافئ ازدواجًا ، وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد مقدار قوتين تؤثران فى ا ، ح عموديتين على ا ح وتجعلان المجموعة فى حالة توازن .

الحـــل

∵ ١٢/٣ = ١٦/٤ = ٢٠/٥ = ٤

أى أن القـوى تتناسـب مع أضـلاع الشـكل والقوى مأخوذة فى ترتيب دورى واحد .

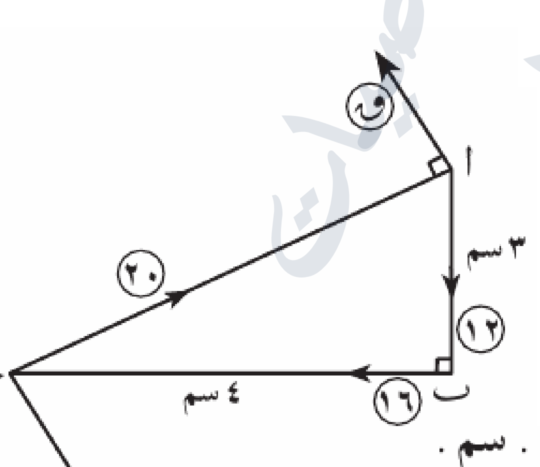
∴ المجموعة تكافئ ازدواجا عزمه .

ج‍ = − ٢ × ١٢ × ٤ = − ٤٨ نيوتن . سم .

(ق ، ق) تكونان ازدواجًا معيار عزمه = ق × ٥ نيوتن . سم .

∵ المجموعة فى حالة توازن .

∴ ٥ ق − ٤٨ = ٠ ∴ ق = ٩,٦ نيوتن .



(٢٦) تؤثر القوة ق = ٣ س - ٣ ص عند النقطة ا = (٣ ، ٦ ، ٠) أوجد عزم ق بالنسبة لكل من النقطتين ب = (٤ ، ٦ ، ٣) ، حـ = (- ١ ، ٦ ، ٢) ومن ثم أثبت خط عمل ق ينصف ب حـ

الحل

ب ا = ا - ب = (- ٤ ، ٤ ، ٠) حـ ا = ا - حـ = (٢ ، ٦ ، ٢)

جـ ب = ب ا × ق = (- ٤ ، ٤ ، ٠) × (٣ ، ٣ -) = ١٢ ع

جـ حـ = حـ ا × ق = (٢ ، ٦ ، ٢) × (٣ ، ٣ -) = (- ٦ - ٦) ع = - ١٢ ع

∵ جـ حـ = - جـ ب ∴ خط عمل ق ينصف ب حـ

---

(٢٧) تؤثر القوة = ٦ س - ٨ ص في النقطة ا = (١ ، ٢) عين متجه عزم ق بالنسبة للنقطة ب = (- ٣ ، - ١) ثم احسب طول العمود المرسوم من النقطة ب على خط عمل هذه القوة .

الحل

∵ ب ا = ا - ب ∴ ب ا = (١ ، ٢) - (- ٣ ، - ١)

∵ ب ا = ٤ س + ٣ ص

∴ جـ ب = ب ا × ق = (٤ ، ٣) × (٦ ، - ٨) = (- ٣٢ - ١٨) ع = - ٥٠ ع

طول العمود المرسوم من ب على خط عمل ق = || جـ ب || / || ق || = ٥٠ / √(٣٦ + ٦٤) = ٥٠ / ١٠ = ٥

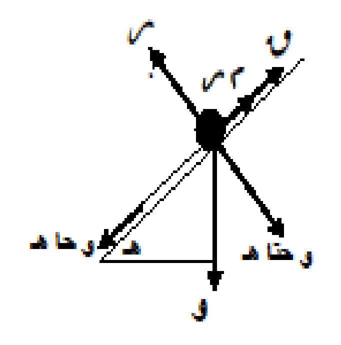


وضع جسم مقدار وزنه (و) نيوتن على مستو مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها (هـ) وقياس زاوية الإحتكاك بين الجسم والمستوى (ل) . حيث هـ > ل أثبت أن أقل قوة تؤثر على الجسم في إتجاه خط أكبر ميل المستوى إلى أعلى وتمنعه من الإنزلاق يكون مقدارها و × $\frac{\text{جا (هـ - ل)}}{\text{جتا ل}}$

الحــل ∵ الجسم على وشك الإنزلاق إلى أسفل المستوى

∴ الإحتكاك نهائي = م ر في إتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى

وبتحليل قوة الوزن إلى مركبتيها



∴ ر = و جتا هـ ، ق = و جا هـ − م ر

وبالتعويض من (١) عن ر في (٢) وعن م = ظا ل

∴ ق = و جا هـ − و جتا هـ × $\frac{\text{جا ل}}{\text{جتا ل}}$

∴ ق = و × $\frac{\text{جا هـ جتا ل - جتا هـ جا ل}}{\text{جتا ل}}$ = و × $\frac{\text{جا (هـ - ل)}}{\text{جتا ل}}$

---

٢٩ أكمـــــــل ما يأتي

(١) الشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى المستوية هي إنعدام مجموع المركبات الجبرية للقوى في أتجاهين متعامدين واقعين في مستويهما

(٢) إذا كان $\overleftarrow{ج}_1$ ، $\overleftarrow{ج}_2$ متجهين عزمي ازدواجين مستويين فإن الازدواجين يكونا متوازنين إذا كان $\overleftarrow{ج}_1 + \overleftarrow{ج}_2$ = صفر

(٣) قوتين $ق_1$ = ٤سـ − أ ص ، $ق_2$ = ٢ب سـ + ٥ ص يكون ازدواج فإن ٢أ + ب = −٨

(٤) إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث نقط ليست على أستقامة واحدة بحيث كان هناك مجموعة من القوى في مستويهما وكان $\overleftarrow{ج}_أ$ = $\overleftarrow{ج}_ب$ = $\overleftarrow{ج}_جـ$ = $\overleftarrow{صفر}$ فإن المجموعة تكون متزنة

(٥) إذا انعدم مجموع عزمي قوة $\overleftarrow{ق}$ حول النقطتين أ ، ب فإن خط عمل $\overleftarrow{ق}$ ينصف $\overleftarrow{أ ب}$

(٣٠) ا ب حـ ء مربع طول ضلعه ٢٠ سم ، أثرت القوى التى مقاديرها ٦ ، ٧ ، ٦ ، ٧ نيوتن فى $\overleftarrow{ا ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{ا ء}$ على الترتيب، كما أثرت قوتان مقدار كل منهما ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن عند ا ، حـ فى الاتجاهين $\overleftarrow{ب ء}$ ، $\overleftarrow{ء ب}$ على الترتيب ، أوجد : (أولاً) معيار عزم الازدواج الذى يكافئ المجموعة .

(ثانيًا) مقدار واتجاه قوتين تعملان عند ب ، ء وتوازيان $\overleftrightarrow{ا حـ}$ وتجعلان المجموعة فى حالة توازن

الحـــل

(أولاً) (٦ ، ٦) تكونان ازدواجًا عزمه

$= - ٦ \times ٢٠ = - ١٢٠$ نيوتن . سم .

(٧ ، ٧) تكونان ازدواجًا عزمه

$= ٧ \times ٢٠ = ١٤٠$ نيوتن . سم .

(٤ $\sqrt{٢}$ ، ٤ $\sqrt{٢}$) تكونان ازدواجًا عزمه

$= ٤\sqrt{٢} \times ٢٠\sqrt{٢} = ١٦٠$ نيوتن . سم .

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا عزمه $= - ١٢٠ + ١٤٠ + ١٦٠ = ١٨٠$ نيوتن . سم .

لكى يحدث توازن للمجموعة . ∴ (ق ، ق) تكونان ازدواجًا عزمه $= - ١٨٠$ نيوتن . سم .

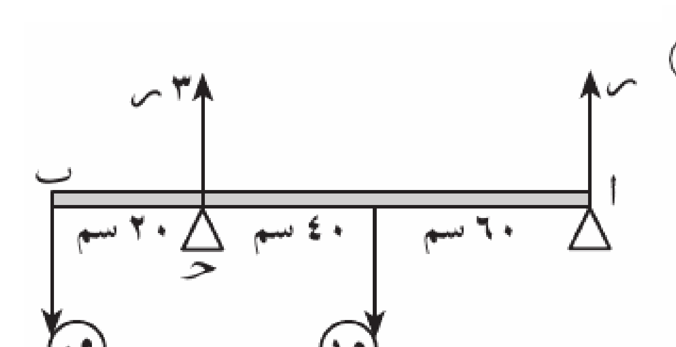
∴ $- ق \times ٢٠\sqrt{٢} = - ١٨٠$ ∴ $ق = \frac{٩}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٩\sqrt{٢}}{٢}$ نيوتن .

∴ القوتان $\frac{٩\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{٩\sqrt{٢}}{٢}$ نيوتن وتعملان فى اتجاهى $\overleftarrow{ا حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ ا}$

(٣١) يرتكز قضيب ا ب طوله ١٢٠ سم ، وزنه ١٥ نيوتن ويؤثر عند نقطة منتصفه فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند ا والآخر على بعد ٢٠ سم من ب ، ما هو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه عند الطرف ب للقضيب بحيث تصبح قيمة رد الفعل عند الحامل القريب من هذا الطرف مساوية ثلاثة أمثال قيمتها عند ا ثم أوجد قيمتى ردى الفعلين عندئذ .

الحـــل

$$\boxed{و + 15 = 4\,ر}$$ ...... (1)



∵ $ج_ح = 0$

∴ $3ر \times 20 + ر \times 120 - 15 \times 60 = 0$

(بالقسمة على ٦٠)

∴ $ر + 2ر - 15 = 0$ ∴ ر = ٥ نيوتن .

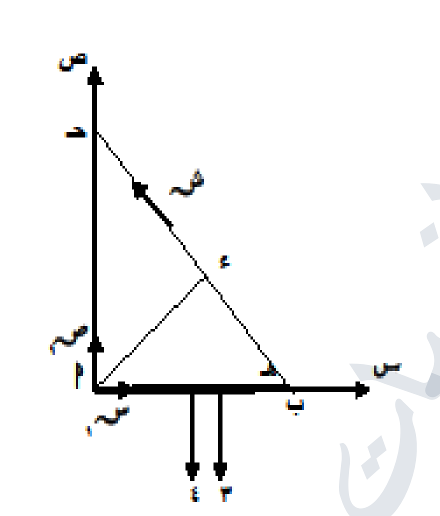
من (1) و = ٢٠ – ١٥ ∴ و = ٥ نيوتن .

رد الفعل عنـــد ا = ٥ نيوتن ، رد الفعل عند حـ = ١٥ نيوتن .

---

(٣٣) **ا ب قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم و مقدار وزنه ٤ نيوتن يتصل طرفه ا بمفصل مثبت فى حائط رأسى علق ثقل قدره ٣ نيوتن فى نقطة من القضيب تبعد ٨٠ سم عن ا و حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة حبل يتصل أحد طرفيه بالطرف ب للقضيب و يتصل طرفه الآخر بنقطة على الحائط تبعد ١٦٠ سم رأسياً أعلى ا أوجد الشد فى الخيط ورد فعل المفصل**

الحــل



من الشكل المقابل :

ا ب = ١٢٠ سم ، ا ب = ١٦٠ سم ∴ ب حـ = ٢٠٠ سم ، ا ء = ٩٦ سم

نفرض أن مركبتى رد فعل المفصل ر هما $س_1$ ، $ص_1$

حيث : $ر^2 = س_1^2 + ص_1^2$

من شروط التوازن : س = ٠ ∴ $س_1 - ش$ حتا هـ = ٠

∴ $س_1 = \frac{3}{5}$ ش (1)

، ص = ٠ ∴ $ص_1 - 3 - 4 +$ ش حا هـ = ٠

∴ $ص_1 = 7 - \frac{4}{5}$ ش (2)

، $ج_ا = 0$ ∴ 96 ش $- 4 \times 60 - 3 \times 80 = 0$

∴ ٩٦ ش = ٤٨٠ ∴ ش = ٥ نيوتن

، لإيجاد " رد فعل المفصل " ر بالتعويض فى كل من (1) ، (2) ينتج :

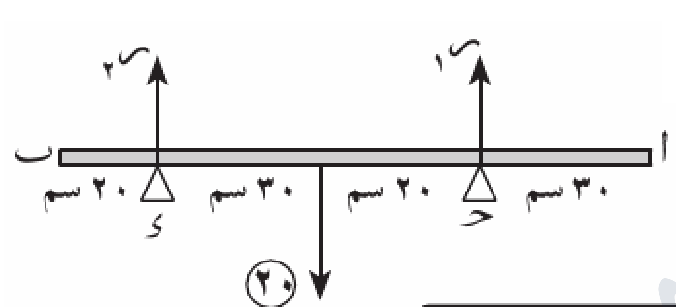
$س_1 = \frac{4}{5} \times 5 = 3$ ، $ص_1 = 7 - \frac{3}{5} \times 5 = 3$ ∴ $ر = 3\sqrt{2}$ نيوتن

ظا ل = $\frac{3}{3} = 1$ ∴ ل = ٤٥°

∴ رد فعل المفصل = $3\sqrt{2}$ نيوتن ويصنع زاوية قياسها ٤٥°

(٣٣) قضيب ا ب طوله ١٠٠ سم ، ووزنه ٢٠ نيوتن يؤثر عند نقطة منتصفه ، يرتكز في وضع أفقي على حاملين أحدهما يبعد ٣٠ سم ، عن ا والآخر يبعد ٢٠ سم ، عن ب أوجد مقدار الضغط الواقع على كل من الحاملين . ما هو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب حتى يكون القضيب على وشك الدوران ؟ وما هي قيمة الضغط على الحامل الأقرب لنقطة ب عندئذ ؟

الحـــل

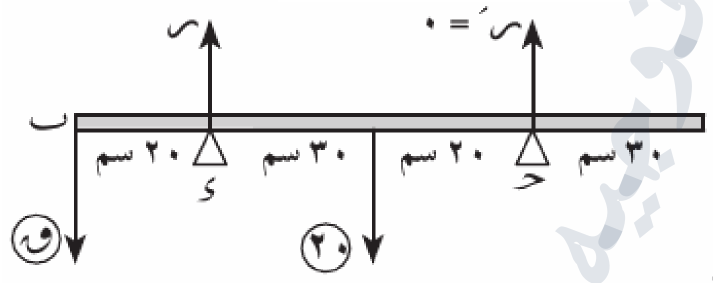


★ $ر_1 + ر_2 = ٢٠$ .... (١)

∵ $ج_ى$ = صفرًا .

∴ $ر_1 × ٥٠ - ٢٠ × ٣٠ = ٠$

∴ **$ر_1 = ١٢$ نيوتن**   من (١) **$ر_2 = ٨$ نيوتن**



∵ القضيب على وشك الدوران حول ى

∴ ر د الفعل عند حـ = ٠

∵ $ج_ى$ = و × ٢٠ − ٢٠ × ٣٠ = صفرًا .

∴ **و = ٣٠ نيوتن**   ∵ ر′ = ٢٠ + و   ∴ **ر′ = ٥٠ نيوتن**

---

(٣٤) تؤثر القوة $\overleftarrow{ق}$ = ل $\overleftarrow{س}$ + م $\overleftarrow{ص}$ في النقطة ا = (٢ ، − ١) والقياس الجبرى لعزم هذه القوة بالنسبة للنقطة ب = (١ ، ٤) يساوى ١١ وحدة عزم وينعدم عزمها بالنسبة للنقطة ى = (− ١ ، ٣) أوجد مقدار $\overleftarrow{ق}$.

الحـــل

∵ $\overleftarrow{ب ا}$ = $\overleftarrow{ا}$ − $\overleftarrow{ب}$ = $\overleftarrow{س}$ − ٥ $\overleftarrow{ص}$

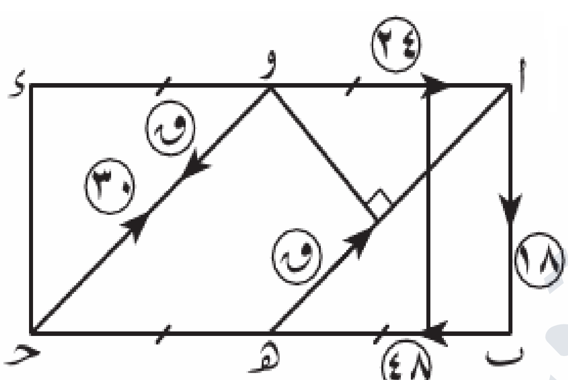
∵ $\overleftarrow{ج_ب}$ = $\overleftarrow{ب ا}$ × $\overleftarrow{ق}$

∴ ١١ $\overleftarrow{ع}$ = (١ ، − ٥) × (ل ، م) = (م + ٥ ل) $\overleftarrow{ع}$

∴ **م + ٥ ل = ١١** .... (١)

(٣٥) ا ب ح ء مستطيل فيه ا ب = ٩ سم ، ب ح = ٢٤ سم ، هـ ، و منتصفا $\overline{بح}$ ، $\overline{اء}$ على الترتيب ، أثرت قوى مقاديرها ١٨ ، ٤٨ ، ٣٠ ، ٢٤ ث . جم في $\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{بح}$ ، $\overleftarrow{حو}$ ، $\overleftarrow{وا}$ على الترتيب : أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا ، وأوجد معيار عزمه ، ثم أوجد مقداري القوتين اللتين تؤثران في $\overleftarrow{هـا}$ ، $\overleftarrow{وح}$ حتى تحدث اتزانا مع القوى المعلومة .

الحـل



في Δ ح ء و : ∵ ق ($\angle$ ء) = ٩٠°

∴ $(وح)^٢ = (وء)^٢ + (ءح)^٢$

∴ وح = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٩)^٢} = \sqrt{٢٢٥}$

∴ وح = ١٥ سم .

في الشكل ا ب ح و : ∵ $\frac{٢٤}{١٢} = \frac{١٨}{٩} = \frac{٤٨}{٢٤} = \frac{٣٠}{١٥} = ٢$

أي أن : القوى تتناسب مع أطوال أضلاع الشكل .

∵ القوى مأخوذة في ترتيب دوري واحد . ∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا عزمه = $ج_و$

∴ $ج_و$ = − ١٨ × ١٢ − ٤٨ × ٩ = − ٦٤٨ ث جم .سم .

∴ معيار عزم الازدواج = ٦٤٨ ث جم . سم .

نفرض أن : القوتين المؤثرتين في $\overleftarrow{هـا}$ ، $\overleftarrow{وح}$ هما ق ، ق وهما يكونان ازدواجًا عزمه .

= ق × وهـ = ق × ١٢ حا ا = ق × ١٢ × $\frac{٩}{١٥}$ = $\frac{٣٦}{٥}$ ق ث جرام . سم .

∵ الازدواجان متزنان . ∴ $\frac{٣٦}{٥}$ ق − ٦٤٨ = ٠

∴ ق = ٩٠ ث جرام . ∴ القوتان هما : ٩٠ ث جرام ، ٩٠ ث جرام .

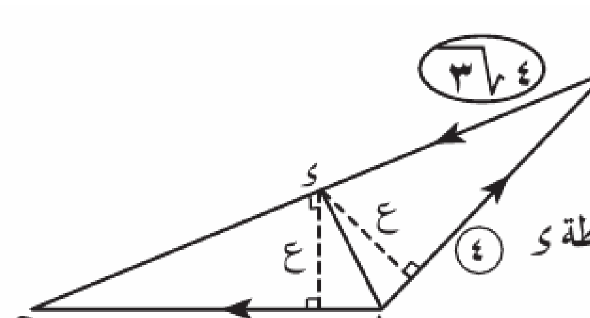


ا ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه ق(∠ ا) = ١٢٠° تؤثر قوى مقاديرها ٤ ، ٤ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ث . كجم فى ا ب ، ا حـ ، ب حـ على الترتيب .

أثبت أن : خط عمل المحصلة يمر بمنتصف ب حـ ويوازى ا حـ

الحــل

∵ المثلث متساوى الساقين .



∴ بعد نقطة ء عن ا ب يساوى بعدها عن ا حـ

بفرض أن : ع هى بعد خط عمل القوة ٤ عن نقطة ء

∴ $ج_{ء}$ = ٤ × ع − ٤ × ع = صفرًا .

∴ خط عمل المحصلة يمر بمنتصف ب حـ

∵ $ج_{ا}$ = ٤ $\sqrt{٣}$ × ا ب حا ٣٠° = ٢ $\sqrt{٣}$ ا ب ث كجم . سم .

$ج_{حـ}$ = ٤ × ا ب حتا ٦٠° = ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ا ب = ٢ $\sqrt{٣}$ ا ب ث كجم . سم .

∵ $ج_{ا}$ = $ج_{حـ}$ ∴ خط عمل المحصلة يوازى ا حـ

أنتهت المراجعة

مع كل تمنياتى لكم بالنجاح والتفوق

مع تحيات أسرة توجيه الرياضيات